

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

APOSTILA 3

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA: Geometria Plana; Geometria Espacial; Notação Científica/Ordem de Grandeza; Transformação de Unidades; Trigonometria no Círculo; Razões Trigonométricas.

GEOMETRIA PLANA.....	3
Elementos primitivos importantes.....	3
ÂNGULOS.....	3
Classificação dos ângulos.....	4
Ângulos congruentes.....	4
Ângulos opostos pelo vértice.....	4
Bissetriz de um ângulo.....	5
Soma de dois ângulos - casos particulares.....	5
Material complementar:	5
POLÍGONOS.....	5
Elementos do polígono.....	6
Observações:.....	6
Polígonos côncavos e polígonos convexos:.....	6
Classificação dos polígonos.....	7
Material complementar:	7
ÁREA E PERÍMETRO.....	7
Cálculo de área de figuras planas.....	7
Material complementar:	8
COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	8
Curiosidade sobre o número.....	9
Material complementar:	9
Exercícios.....	9
GEOMETRIA ESPACIAL.....	12
Principais figuras geométricas.....	12
Poliedros.....	12
Corpos redondos.....	13
Planificação.....	14
Projeção ortogonal.....	14
Material complementar:	15
Exercícios.....	15
ORDEM DE GRANDEZA/NOTAÇÃO CIENTÍFICA.....	19
Notação científica.....	19
Ordem de grandeza (OG).....	20
Principais prefixos e símbolos da OG.....	20
Material complementar:	21



PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Exercício.....	21
TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES.....	21
Tempo.....	21
Massa.....	22
Área.....	22
Volume.....	22
Temperatura.....	23
Capacidade.....	23
Material complementar:.....	23
TRIGONOMETRIA.....	24
TRIGONOMETRIA NO CÍRCULO.....	24
Seno, Cosseno e Tangente.....	24
Quadrantes do círculo trigonométrico.....	24
Sinais nos quadrantes.....	25
Material complementar:.....	25
RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	25
Observação:.....	26
Ângulos notáveis.....	26
Material complementar:.....	26
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	26
Função seno.....	26
Gráfico da função seno.....	27
Raízes da função seno.....	27
Função cosseno.....	27
Gráfico da função cosseno.....	28
Raízes da função cosseno.....	28
Função tangente.....	28
Raízes da função tangente.....	29
Gráfico da função tangente:.....	29
Exercícios.....	29
GABARITO.....	30

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

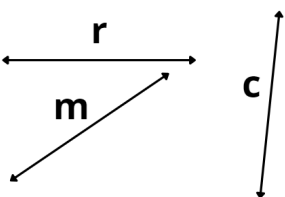
GEOMETRIA PLANA

Elementos primitivos importantes

O ponto, a reta, o plano e o espaço são elementos indispensáveis para a compreensão da Geometria.

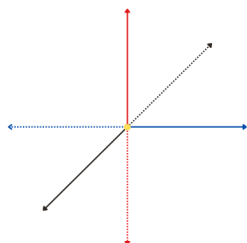
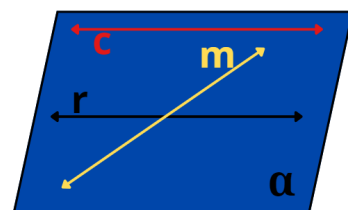
- 1. PONTO:** não possui nenhuma dimensão, definição ou forma. Por isso, não possui medida. São representados por letras maiúsculas.

A P
•



- 2. RETA:** é formada por infinitos pontos colineares (alinhados), não fazem curvas e possuem somente uma dimensão, tendo tamanho infinito. Representada por letras minúsculas.

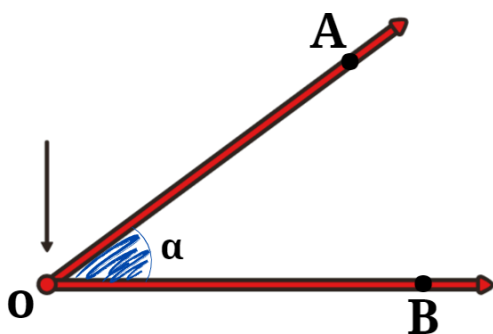
- 3. PLANO:** é formado a partir das retas e, consequentemente, por pontos. Ou seja, é um conjunto infinito e ilimitado de retas. Possui duas dimensões. Representado por letras gregas.



- 4. ESPAÇO:** expansão do plano para uma terceira dimensão, ou seja, possui três dimensões. É o espaço que nos cerca e segue ilimitadamente de um ponto para todas as direções.

ÂNGULOS

Definição: ângulo é a região de encontro de duas semirretas com mesma origem.



Então, considerando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ (semirreta de origem em O e que passa pelo ponto A) e $\overrightarrow{OB}$ (semirreta de origem em O e que passa pelo ponto B),

chamamos esse encontro de ângulo $\widehat{AOB}$ e o termo que fica no meio indica o **vértice** (encontro das duas semirretas/origem).

Comumente damos o nome de uma letra

grega para os ângulos, como mostrado na figura.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

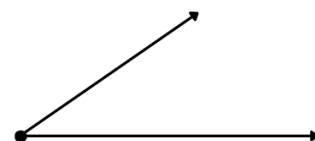
A **unidade de medida** do ângulo é o grau ($^{\circ}$) ou o radiano (rad) e o **instrumento de medida** é o transferidor. A relação entre graus e radiano é: $180^{\circ} = \pi \text{ rad}$.

Classificação dos ângulos

ÂNGULO NULO: é o ângulo que mede 0° .



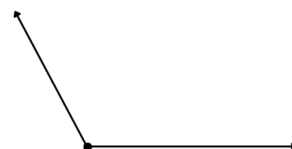
ÂNGULO AGUDO: é um ângulo cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90° .



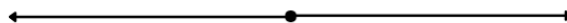
ÂNGULO RETO: é o ângulo que mede 90° .



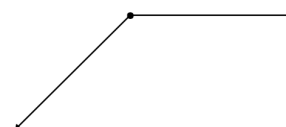
ÂNGULO OBTUSO: é um ângulo cuja medida é maior do que 90° e menor do que 180° .



ÂNGULO RASO: é o ângulo que mede 180° .



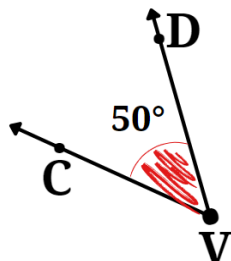
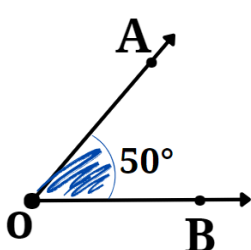
ÂNGULO CÔNCAVO: é um ângulo cuja medida é maior do que 180° e menor do que 360° .



Ângulos congruentes

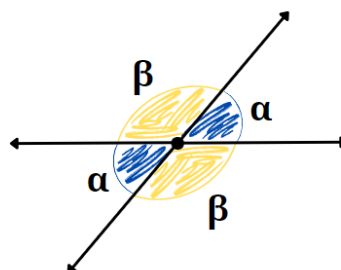
Dois ângulos são chamados de congruentes quando possuem a mesma medida.

Na imagem abaixo, os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{CVD}$ são congruentes.



Ângulos opostos pelo vértice

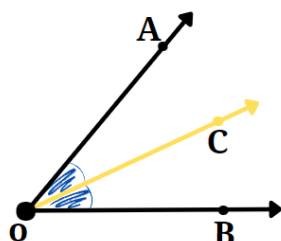
A interseção de duas retas forma quatro ângulos. Os **ângulos opostos pelo vértice** são congruentes.



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Bissetriz de um ângulo

Definimos a bissetriz de um ângulo como uma **semirreta que divide um ângulo em duas partes congruentes**.



Por exemplo: o ângulo $\widehat{AOB}$ dividido pela semirreta $\overrightarrow{OC}$ (que é a bissetriz) forma os ângulos congruentes $\widehat{AOC}$ e $\widehat{COB}$.

Soma de dois ângulos - casos particulares

Ângulos complementares são aqueles cujo resultado de sua soma é 90° . **Por exemplo:** os ângulos 30° e 60° são complementares, pois $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Os ângulos congruentes 45° e 45° também são complementares e assim por diante.

Ângulos suplementares são aqueles cujo resultado de sua soma é 180° . **Por exemplo:** os ângulos 60° e 120° são suplementares, pois $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$. Os ângulos congruentes 90° e 90° também são suplementares e assim por diante.

Ângulos replementares são aqueles cujo resultado de sua soma é 360° . **Por exemplo:** os ângulos 160° e 200° são replementares, pois $160^\circ + 200^\circ = 360^\circ$. Os ângulos congruentes 180° e 180° também são complementares e assim por diante.

Material complementar:

Definição e tipos de ângulos: <https://youtu.be/nAvqZSglTmA?si=S7txTFfh8GisdK7>

Tudo sobre ângulos: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/angulos.htm>

Ângulos congruentes: <https://pt.khanacademy.org/math/pt-5-ano/geometria-5ano/congruencia-de-angulos-e-a-proporcionalidade-entre-os-lados/a/angulos-congruentes>

Ângulos e retas paralelas cortadas por uma transversal: <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry-angles/geometry-angles-between-lines/v/angles-formed-by-parallel-lines-and-transversals>

Conhecendo o radianos: <https://pt.khanacademy.org/math/3-serie-em-mat-pr/x7e93876b8de48992:2-trimestre-circunferencia-trigonometrica/x7e93876b8de48992:3-serie-pr-razoes-trigonometricas-na-circunferencia-arcs/a/conhecendo-o-radiano>

POLÍGONOS

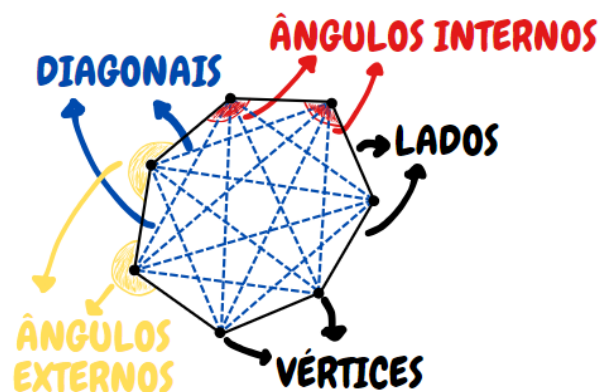
Definição: o **polígono** é uma figura plana fechada e formada por segmentos de retas. Deve ter pelo menos 3 lados (segmentos de reta).

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Definição: um **polígono regular** é um polígono que tem todos os seus lados iguais e os seus ângulos internos congruentes. Ex: o quadrado e o triângulo equilátero.

Elementos do polígono

- **Lados:** são os segmentos de reta;
- **Vértices:** são os encontros de dois segmentos de retas;
- **Diagonais:** são o ligamento de dois vértices não consecutivos (não vizinhos);
- **Ângulos internos:** são os ângulos dentro do polígono;
- **Ângulos externos:** são os ângulos fora do polígono.

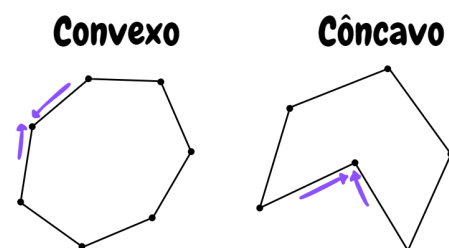


Observações:

- Figuras que fazem curvas não são consideradas polígonos. Ex: o círculo não é um polígono;
- O número de vértices de um polígono é igual ao seu número de lados;
- O número de diagonais de um polígono é: $d = \frac{n(n-3)}{2}$, onde d é o número de diagonais e n o número de lados;
- A soma dos ângulos internos de um polígono é: $S_i = 180^\circ(n - 2)$, onde S_i é a soma e n o número de lados;
- A soma dos ângulos externos de um polígono é: $S_e = 360^\circ$, onde S_e é a soma e n o número de lados;
- Para determinar qual o ângulo interno de um **polígono regular**: $A_i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$, onde A_i é o ângulo e n o número de lados;
- Para determinar qual o ângulo externo de um **polígono regular**: $A_e = \frac{360^\circ}{n}$, onde A_e é o ângulo e n o número de lados;

Polígonos côncavos e polígonos convexos:

Um **polígono côncavo** tem pelo menos um vértice “apontando” para o seu interior. Um **polígono convexo** tem todos os seus vértices “apontando” para o seu exterior.



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Classificação dos polígonos

Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
20	Icoságono

Material complementar:

Polígonos: https://youtu.be/LI8rDyEMQ74?si=7B_zhoy8LUInZvEz

Polígonos: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-poligono.htm#:~:text=Os%20pol%C3%ADgonos%20s%C3%A3o%20linhas%20fechadas,geom%C3%A9tricas%20inteiramente%20formadas%20por%20lados.>

ÁREA E PERÍMETRO

Definição: a **área** é a grandeza que mede a superfície de uma figura.

Por exemplo, você quer colocar piso em algum cômodo da sua casa. Para isso, você precisará saber a área (superfície) que será ocupada pelo piso para comprar a quantidade certa.

Definição: o **perímetro** é a soma das medidas dos lados das figuras geométricas.

Cálculo de área de figuras planas

Para calcular a área das figuras, existem algumas fórmulas. Segue as fórmulas mais populares:

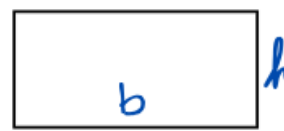
Área do quadrado: $A = l^2$;

Área do retângulo: $A = b \cdot h$;

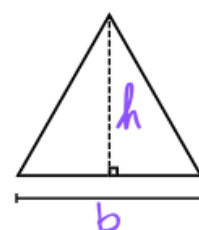
QUADRADO



RETÂNGULO



TRIÂNGULO





PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

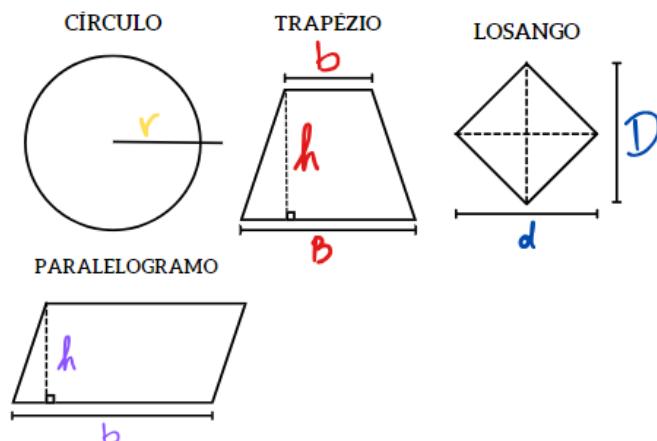
Área do triângulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$;

Área do círculo: $A = \pi r^2$;

Área do trapézio: $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$;

Área do losango: $A = \frac{D \cdot d}{2}$;

Área do paralelogramo: $A = base \cdot altura$.



Material complementar:

Área das principais figuras planas, exercícios e decomposição de áreas:

https://youtu.be/th5k6bzSDTA?si=d_Lwhg06VFg0HiLc

Perímetro:

<https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-geometria/x44371671f5ceab6a:geometria-plana-metrica/x44371671f5ceab6a:investigando-relacoes-entre-areas-e-perimetros/v/introduction-to-perimeter>

Área e exemplos: <https://youtu.be/W-JObyKKhyc?si=xBsvkdMFg2cwtbeI>

Diferença entre área e perímetro:

https://youtu.be/WFnD5l0KBXA?si=TYuh_D6PJD3skrpp

Resolução de problemas sobre área e perímetro:

<https://youtu.be/dArATPsljM?si=hYeUi-oYHCIDJGgU>

Área de figuras compostas:

<https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/x7fa91416:decomposing-to-find-area/x7fa91416:area-of-composite-figures/v/area-comparisons>

Área pela planificação de figuras espaciais:

<https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/x7fa91416:3d-figures/x7fa91416:surface-area-with-nets/v/nets-of-polyhedra>

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Definição: o comprimento de uma circunferência é a medida do seu contorno. E para calcular o comprimento de uma circunferência, temos a seguinte fórmula:

$$C = 2\pi r$$

Onde, **C** é a medida do comprimento da circunferência e **r** é o raio da circunferência. Podemos considerar o comprimento da circunferência como o seu perímetro.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Curiosidade sobre o número π

Existe uma relação entre o comprimento da circunferência com o diâmetro que resulta exatamente no número π :

$$\frac{C}{d} = \pi$$

Onde **C** é a medida da circunferência e **d** é o diâmetro.

Material complementar:

Definição de comprimento da circunferência e exercícios:
<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/comprimento-area-circunferencia.htm>

Calcular comprimento da circunferência sabendo a área:
<https://pt.khanacademy.org/math/pt-7-ano/grandezas-e-medidas-7ano/area-e-circunferencia-de-circulos/v/circumference-from-area>

Raio, diâmetro, circunferência e π :
<https://pt.khanacademy.org/math/pt-7-ano/grandezas-e-medidas-7ano/area-e-circunferencia-de-circulos/v/circles-radius-diameter-and-circumference>

Exercícios de cálculo de comprimento de uma circunferência:
<https://youtu.be/3RKjclErNMo?si=uesKtueMR0F-Okfi>

Exercícios

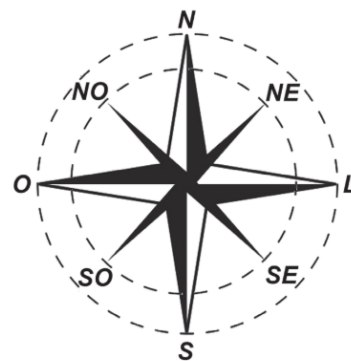
1 - (ENEM 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente. Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

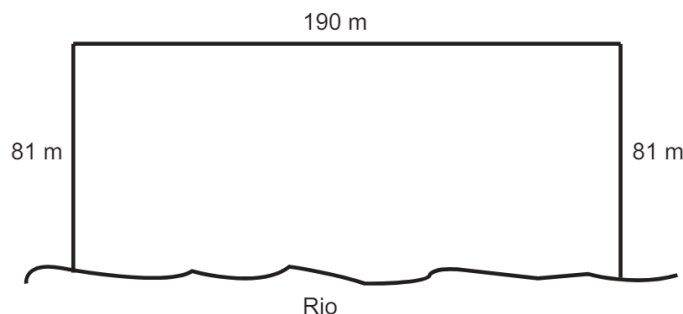
- A. 75° no sentido horário.
- B. 105° no sentido anti-horário.
- C. 120° no sentido anti-horário.
- D. 135° no sentido anti-horário.



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

E. 165° no sentido horário.

2 - (ENEM 2013) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

- A. 6.
- B. 7.
- C. 8.
- D. 11.
- E. 12.

3 - (ENEM 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

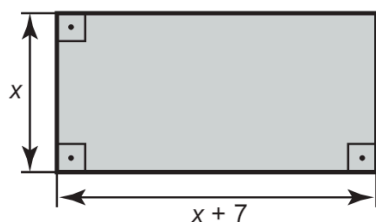


Figura A

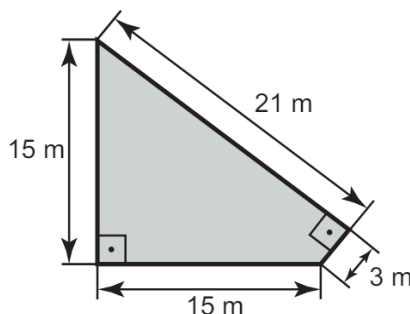


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:



PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

- A. 7,5 e 14,5.
- B. 9,0 e 16,0.
- C. 9,3 e 16,3.
- D. 10,0 e 17,0.
- E. 13,5 e 20,5.

4 - (ENEM 2022) Um casal planeja construir em sua chácara uma piscina com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com capacidade para 90.000 L de água. O casal contratou uma empresa de construções que apresentou cinco projetos com diferentes combinações nas dimensões internas de profundidade, largura e comprimento. A piscina a ser construída terá revestimento interno em suas paredes e fundo com uma mesma cerâmica, e o casal irá escolher o projeto que exija a menor área de revestimento.

As dimensões internas de profundidade, largura e comprimento, respectivamente, para cada um dos projetos, são:

- projeto I: 1,8 m, 2,0 m e 25,0 m;
- projeto II: 2,0 m, 5,0 m e 9,0 m;
- projeto III: 1,0 m, 6,0 m e 15,0 m;
- projeto IV: 1,5 m, 15,0 m e 4,0 m;
- projeto V: 2,5 m, 3,0 m e 12,0 m.

O projeto que o casal deverá escolher será o

- A. I.
- B. II.
- C. III.
- D. IV.
- E. V.

5 - (ENEM - PPL - 2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio. Use 3 como aproximação para π . Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

- A. 0,30 km.
- B. 0,75 km.
- C. 1,50 km.
- D. 2,25 km.
- E. 4,50 km.

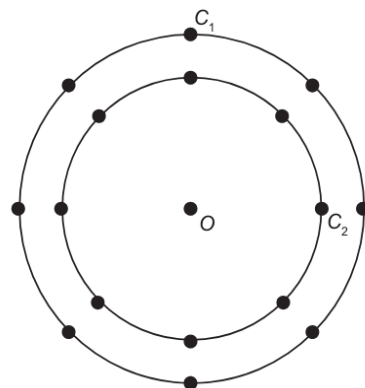
6 - (ENEM - PPL - 2015) A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m,

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.

Quantos metros uma criança sentada no cavalo C1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π .

- A. 55,5.
- B. 60,0.
- C. 175,5.
- D. 235,5.
- E. 240,0.



GEOMETRIA ESPACIAL

A **geometria espacial** estuda objetos tridimensionais, ou seja, objetos geométricos no espaço - que contém três dimensões.

Principais figuras geométricas

As figuras geométricas do espaço são conhecidas como **sólidos geométricos** e estes são divididos em dois grupos: poliedros e corpos redondos.

Poliedros

Os **poliedros** são os sólidos formados por faces poligonais. Por exemplo: o cubo possui quadrados (polígonos) como face. Outros exemplos são os demais prismas e as pirâmides.

1. **PRISMA**: possui faces planas e duas bases paralelas entre si. Sua inclinação pode ser reta ou oblíqua e suas faces laterais são sempre retangulares. Alguns exemplos são o cubo, o paralelepípedo, o prisma de base triangular etc.

Para calcular **área total da superfície** de um prisma:

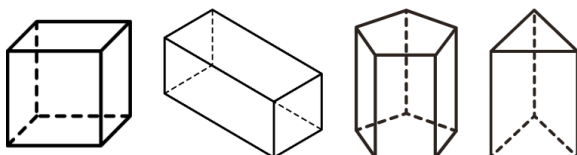
$$\text{Área total} = \text{Área da base} + \text{Área lateral}$$

E a área lateral, por sua vez, é a soma das áreas das faces laterais.

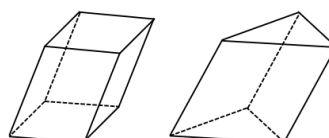
Para calcular o **volume** de um prisma:

$$\text{Volume} = \text{Área da base} \cdot \text{altura}$$

Prismas Retos



Prismas Oblíquos



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

2. **PIRÂMIDE**: possui faces laterais triangulares (triângulos isósceles) e uma base. Sua inclinação pode ser reta ou oblíqua.

Para calcular **área total da superfície** de uma pirâmide:

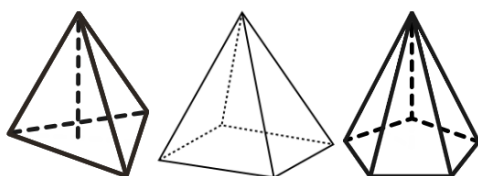
$$\text{Área total} = \text{Área da base} + \text{Área lateral}$$

E a área lateral, por sua vez, é a soma das áreas das faces laterais.

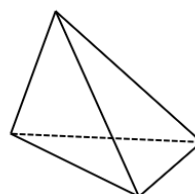
Para calcular **o volume** de uma pirâmide:

$$\text{Volume} = \frac{\text{Área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Pirâmides Retas



Pirâmide Oblíqua



Corpos redondos

Os **corpos redondos** são os sólidos geométricos que possuem aspectos arredondados. Os principais corpos redondos são a esfera, o cilindro e o cone.

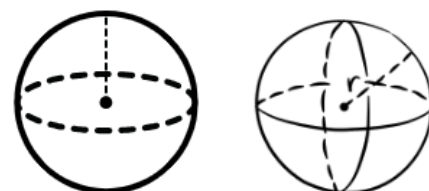
1. ESFERA

Para calcular a **área total da superfície** de uma esfera:

$$\text{Área total} = 4\pi r^2$$

Para calcular **o volume** de uma esfera:

$$\text{Volume} = \frac{4\pi r^3}{3}$$



2. CILINDRO

possui duas bases paralelas entre si.

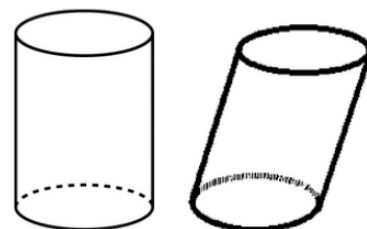
Para calcular a **área total da superfície** de um cilindro:

$$\text{Área total} = 2A_b + A_l = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para calcular **o volume** de um cilindro:

$$\text{Volume} = A_b \cdot h = \pi r^2 h$$

Cilindro Reto **Cilindro Oblíquo**



3. CONE

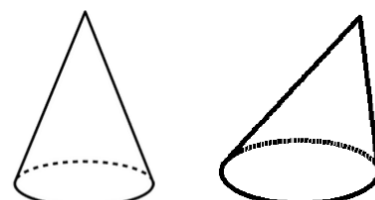
possui uma base.

Para calcular a **área total da superfície** de um cone:

$$\text{Área total} = A_b + A_l = \pi r^2 + \pi rg, \text{ onde } g \text{ é a geratriz do cone.}$$

Para calcular **o volume** de um cone:

Cone Reto **Cone Oblíquo**



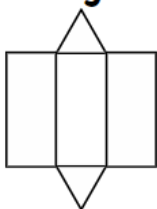
CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

$$Volume = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

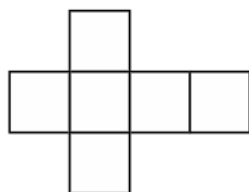
Planificação

A **planificação** é a representação 2D (em um plano) de um corpo 3D (de um espaço). Podemos pensar nela como “desdobramento” do sólido. Note que o número de faces sempre será igual ao número de polígonos. **Alguns exemplos:**

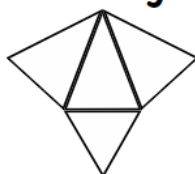
Prisma de base triangular



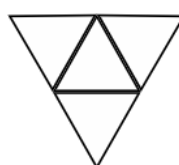
Cubo



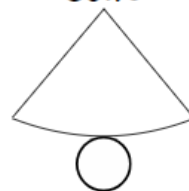
Pirâmide de base triangular



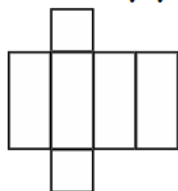
Tetraedro



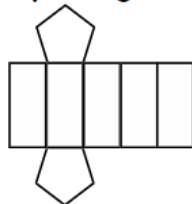
Cone



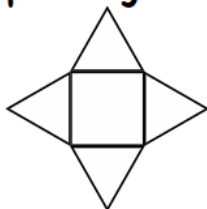
Paralelepípedo



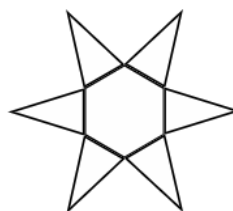
Prisma de base pentagonal



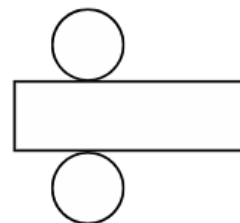
Pirâmide de base quadrangular



Pirâmide de base hexagonal



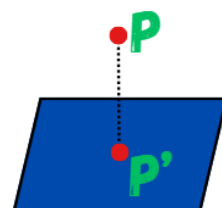
Cilindro



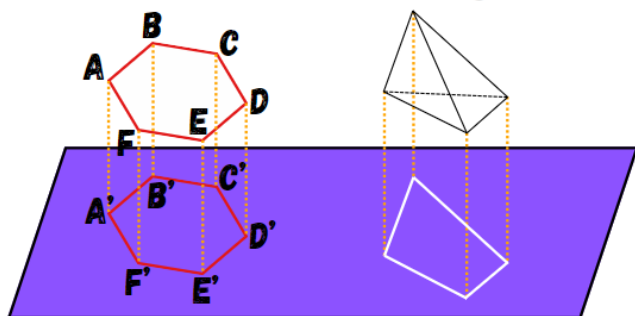
Projeção ortogonal

A **projeção ortogonal** das figuras geométricas sobre um plano pode ser comparada à “sombra” desse objeto sob a luz do sol do meio-dia. Ou seja, projeções ortogonais são a imagem de uma figura geométrica ou objeto matemático projetada perpendicularmente em um plano.

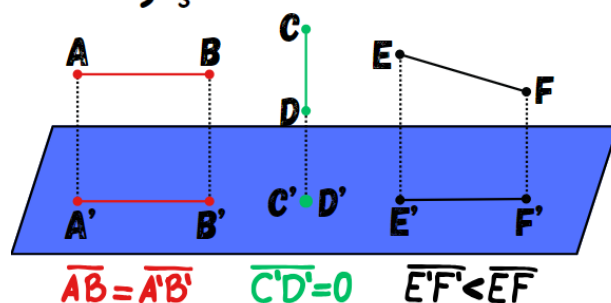
Projeção ortogonal de um ponto



Projeção ortogonal de um objeto geométrico



Projeção ortogonal de uma reta



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Material complementar:

Geometria espacial:
<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/geometria-espacial.htm>

Ponto, reta, plano e espaço:
<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/nocoas-primitivas-geometria-ponto-reta-plano-espaco.htm>

Resumo Geometria espacial:
https://youtu.be/Y_gD7S6OkC4?si=NleV31Wcj_e0uaRx

Prisma: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/prisma.htm>

Relação vértices, arestas e faces:
<https://youtu.be/TnbP-oYFMXI?si=TBKHkx6fZTQz1P7a>

Volume e área de superfície:
<https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry-volume-surface-area>

Planificação: <https://youtu.be/b31jJ7BKjAE?si=X-q-7ZINxRzexYeo>

Projeção ortogonal: <https://descomplica.com.br/d/vs/aula/projecao-ortogonal/>

Exercícios

7 - (ENEM 2022) Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d'água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é P e área da base é A_b , como segue:

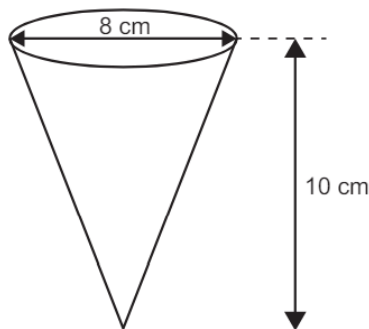
- modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
- modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
- modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
- modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d'água que ofereça a maior capacidade volumétrica. O modelo escolhido deve ser o

- A. I.
- B. II.
- C. III.
- D. IV.
- E. V.

8 - (ENEM 2022) Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- A. 1,52.
- B. 3,24.
- C. 3,60.
- D. 6,48.
- E. 7,20.

9 - (ENEM 2022) Peças metálicas de aeronaves abandonadas em aeroportos serão recicladas. Uma dessas peças é maciça e tem o formato cilíndrico, com a medida do raio da base igual a 4 cm e a da altura igual a 50 cm. Ela será derretida, e o volume de metal resultante será utilizado para a fabricação de esferas maciças com diâmetro de 1 cm, a serem usadas para confeccionar rolamentos.

Para estimar a quantidade de esferas que poderão ser produzidas a partir de cada uma das peças cilíndricas, admite-se que não ocorre perda de material durante o processo de derretimento.

Quantas dessas esferas poderão ser obtidas a partir de cada peça cilíndrica?

- A. 800.
- B. 1.200.
- C. 2.400.
- D. 4.800.
- E. 6.400.

10 - (ENEM 2022) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

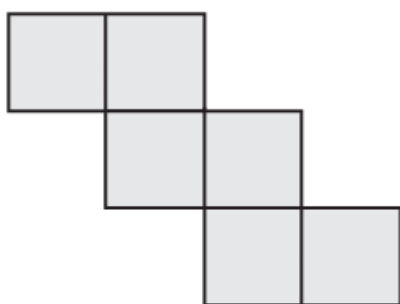


Figura 1

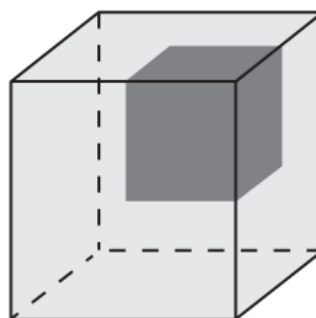
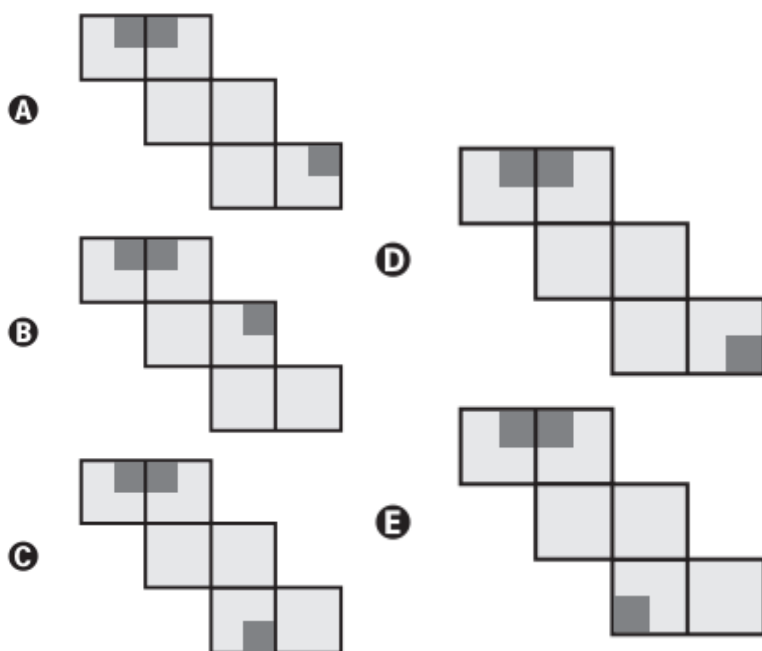


Figura 2

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2. A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1, é



11 - (ENEM 2014) Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

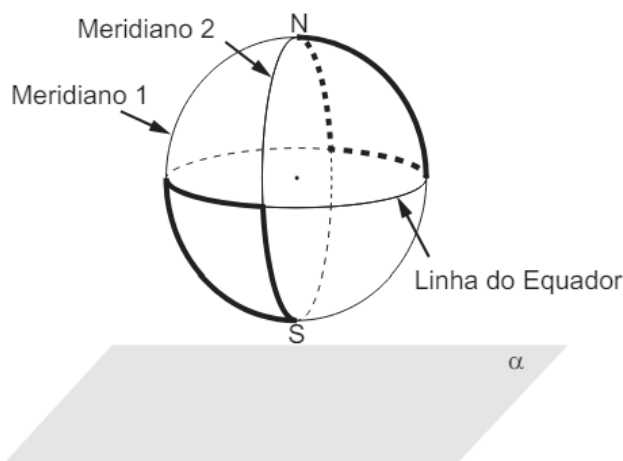


- A. πd .
- B. $2\pi d$.
- C. $4\pi d$.
- D. $5\pi d$.
- E. $10\pi d$.

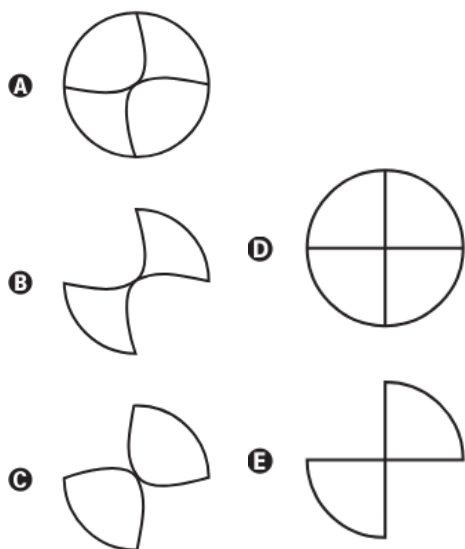
12 - (ENEM 2022) Na figura estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano α é paralelo ao que contém a Linha do Equador.

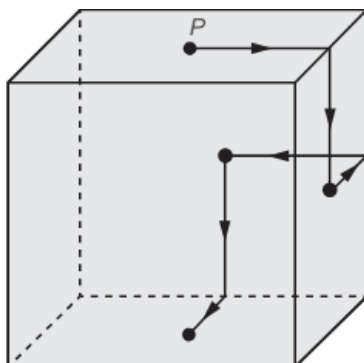


A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano α dessas duas trajetórias é

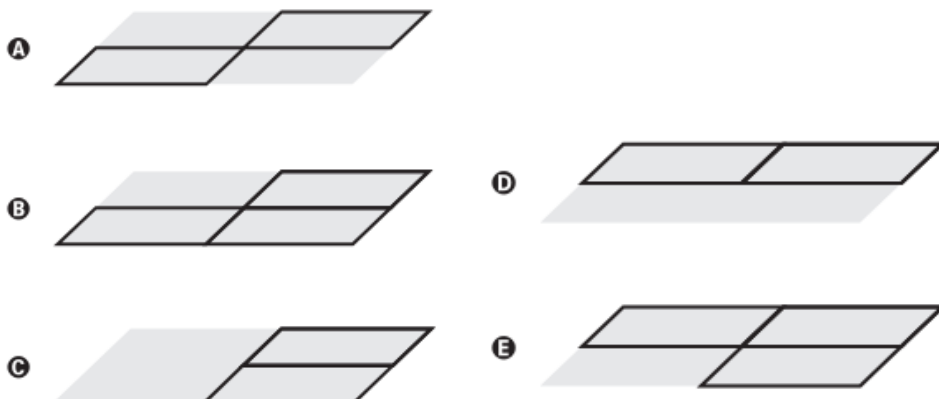


13 - (ENEM 2022) Um robô, que tem um ímã em sua base, se desloca sobre a superfície externa de um cubo metálico, ao longo de segmentos de reta cujas extremidades são pontos médios de arestas e centros de faces. Ele inicia seu deslocamento no ponto P, centro da face superior do cubo, segue para o centro da próxima face, converte à esquerda e segue para o centro da face seguinte, converte à direita e continua sua movimentação, sempre alternando entre conversões à esquerda e à direita quando alcança o centro de uma face. O robô só termina sua movimentação quando retorna ao ponto P. A figura apresenta os deslocamentos iniciais desse robô.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO



A projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação, visualizada da posição em que se está enxergando esse cubo, é



ORDEM DE GRANDEZA/NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Definição: ordem de grandeza é uma estimativa em forma de **potência de 10**.

Notação científica

A **notação científica** é uma maneira simplificada de escrever um número. Sendo assim, todo número $a \in \mathbb{R}$ tem sua notação científica:

$$a \cdot 10^b, 1 \leq a < 10.$$

Ex: $2.000 = 2 \cdot 10^3$ e $1 \leq 2 \leq 10$.

$0,00005 = 5 \cdot 10^{-5}$ e $1 \leq 5 \leq 10$.

$7 = 7 \cdot 10^0$ e $1 \leq 7 \leq 10$.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Ordem de grandeza (OG)

Para determinar a ordem de grandeza de um número, é necessário seguir os passos:

1. Converter o número em notação científica;
2. Analisar o valor que multiplica a potência:
 - a. Dado $a \cdot 10^b$. Quando $a < 3,16$, a ordem de grandeza é 10^b ;
 - b. Dado $a \cdot 10^b$. Quando $a \geq 3,16$, a ordem de grandeza é 10^{b+1} .

Nos exemplos anteriores: $2.000 = 2 \cdot 10^3 \rightarrow OG = 10^3$, pois $2 < 3,16$.

$0,00005 = 5 \cdot 10^{-5} \rightarrow OG = 10^{-5+1} = 10^{-4}$, pois $5 \geq 3,16$.

$7 = 7 \cdot 10^0 \rightarrow OG = 10^{0+1} = 10$, pois $7 \geq 3,16$.

Principais prefixos e símbolos da OG

Valor	Prefixo	OG	Símbolo
Tera	1.000.000.000.000	10^{12}	T
Giga	1.000.000.000	10^9	G
Mega	1.000.000	10^6	M
Kilo	1.000	10^3	k
Deci	0,1	10^{-1}	d
Centi	0,01	10^{-2}	c
Mili	0,001	10^{-3}	m
Micro	0,000001	10^{-6}	μ
Nano	0,000000001	10^{-9}	n
Pico	0,000000000001	10^{-12}	p

Material complementar:

Ordem de grandeza: <https://youtu.be/kPEqh74QvWU?si=ip9EY4HZhLQCIBAL>

Ordem de grandeza: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/ordem-grandeza.htm#:~:text=Ordem%20de>

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

<https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/xb4832e56:scientific-notation-word-problems/v/calculating-red-blood-cells-in-the-body-using-scientific-notation>

Problema de notação científica:
<https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/xb4832e56:scientific-notation-word-problems/v/calculating-red-blood-cells-in-the-body-using-scientific-notation>

Exercício

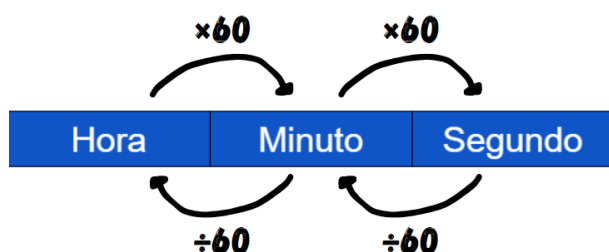
14 - (UFV) Considere o volume de uma gota como $5,0 \cdot 10^{-2}$ ml. A ordem de grandeza do número de gotas em um litro de água é:

- A. 10^3 .
- B. 10^5 .
- C. 10^2 .
- D. 10^4 .
- E. 10^6 .

TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES

Assim como vimos na apostila anterior sobre as transformações métricas, também temos transformações de unidades de outras grandezas como massa, tempo, temperatura etc.

Tempo



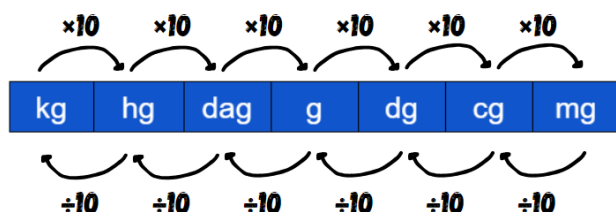
Por exemplo:

- $1h = 1 \cdot 60min = 60min$;
- $1min = 1 \cdot 60s = 60s$;
- $1h = 1 \cdot 60 \cdot 60 = 360s$;
- $1s = 1 \div 60min$;
- $1min = 1 \div 60h$;
- $1s = 1 \div 60 \cdot 60s = 1 \div 360s$.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Massa

As unidades de massa convencionais são quilograma(kg), hectograma(hg), decagrama(dag), grama(g), decigrama(dg), centigrama(cg) e miligrama(mg).

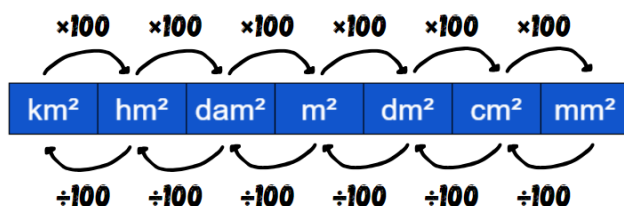


Por exemplo:

- $1kg = 1 \cdot 10hg$;
- $1kg = 1 \cdot 1000g$;
- $1g = 1 \div 10dag$.

Área

As unidades de área convencionais são quilômetros²(km²), hectômetros²(hm²), decâmetros²(dam²), metros²(m²), decímetros²(dm²), centímetros²(cm²) e milímetros²(mm²).

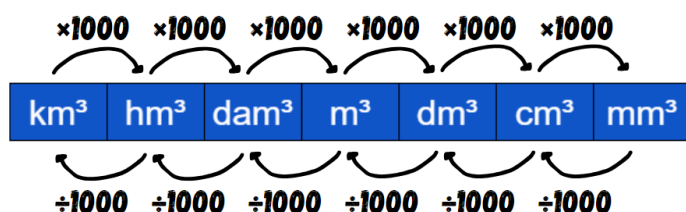


Por exemplo:

- $1km^2 = 1 \cdot 100hm^2$;
- $1cm^2 = 1 \div 100.000m^2$;
- $1m^2 = 1 \cdot 100.000.000mm^2$.

Volume

As unidades de volume convencionais são quilômetros³(km³), hectômetros³(hm³), decâmetros³(dam³), metros³(m³), decímetros³(dm³), centímetros³(cm³) e milímetros³(mm³).



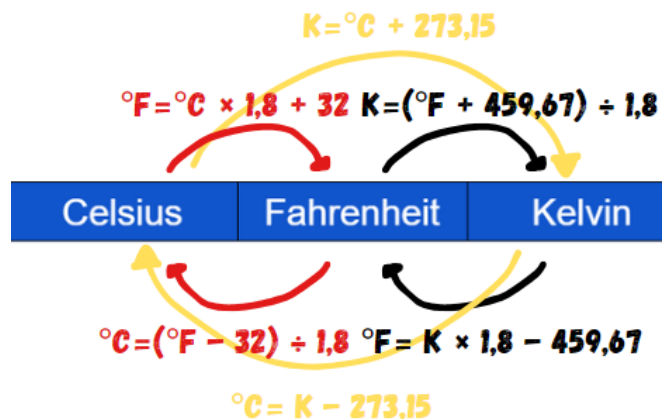
Por exemplo:

- $1dam^3 = 1 \cdot 1.000m^3$;
- $1m^3 = 1 \div 1000000hm^3$;
- $1mm^3 = 1 \div 1.000cm^3$.

Temperatura

Existem diferentes escalas para se medir a temperatura. Cada lugar pode usar um deles. No Brasil, nós medimos a temperatura pela escala Celsius (°C).

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

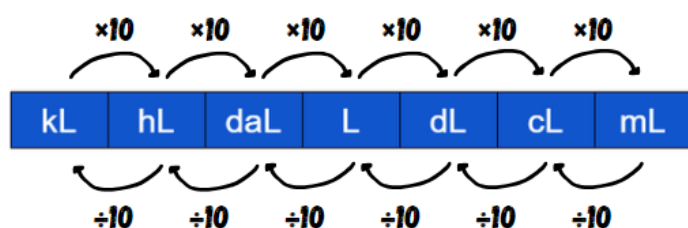


Por exemplo:

- $^\circ F = (1^\circ C \cdot 1,8) + 32 = 1,8 + 32 = 33,8$, ou seja, $33,8^\circ F = 1^\circ C$.
- $^\circ C = 1K - 273,15 = -272,15$, ou seja, $1K = -272,15^\circ C$.
- $K = (1^\circ F + 459,67) \div 1,8 = 460,67 \div 1,8 = 255,927$, ou seja, $1^\circ F = 255,927K$.

Capacidade

As unidades de área convencionais são quilolitros(kL), hectolitros(hL), decalitros(dL), litros(L), decilitros(dL), centilitros(L) e mililitros(mL).



Por exemplo:

- $1kL = 1 \cdot 1.000L$;
- $1cL = 1 \div 100.000kL$;
- $1L = 1 \cdot 1.0dL$.

Material complementar:

Transformação de unidades: <https://youtu.be/O6zOEwb8hcY?si=cRsm7Gw-5u8Aq-fi>

Transformação de unidades:

<https://www.todamateria.com.br/conversao-de-unidades/>

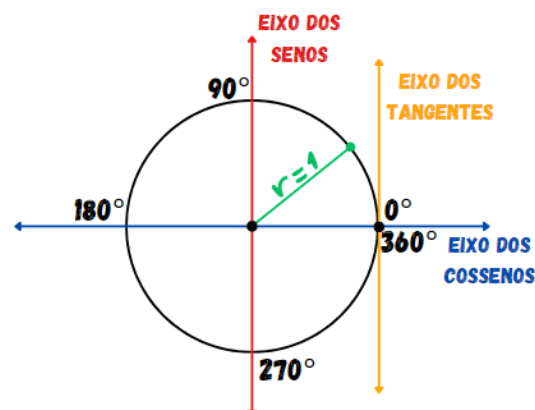
Conversão de unidades:

<https://pt.khanacademy.org/science/fisica-ensino-medio/x6443ccf4d35f6b36:introducao-a-fisica/x6443ccf4d35f6b36:conversao-de-unidades/v/converting-weight>

TRIGONOMETRIA

TRIGONOMETRIA NO CÍRCULO

O círculo trigonométrico é um círculo contido no plano cartesiano tal que o eixo horizontal é o eixo dos

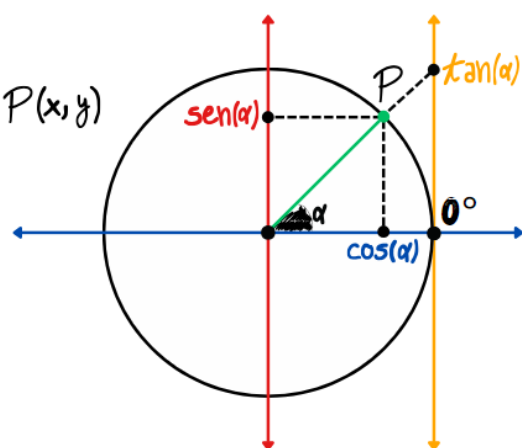


CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

cosenos e o eixo vertical é o eixo dos **senos**. O raio desse círculo é sempre igual a 1.

O **eixo das tangentes** é o eixo paralelo ao eixo dos senos e que passa pelo ponto (1,0).

O círculo trigonométrico começa no 0° e gira no sentido *anti-horário*.



Seno, Cosseno e Tangente

Dado um ângulo qualquer, conhecendo as coordenadas do ponto P no círculo, é possível determinar a medida de seus seno e cosseno. O **cosseno** é calculado pela projeção do ponto no eixo horizontal, ou seja, $\cos(\alpha) = x$. O **seno** é determinado pela projeção do ponto no eixo vertical, ou seja, $\sin(\alpha) = y$.

Já a tangente é a razão do seno pelo cosseno, ou seja,

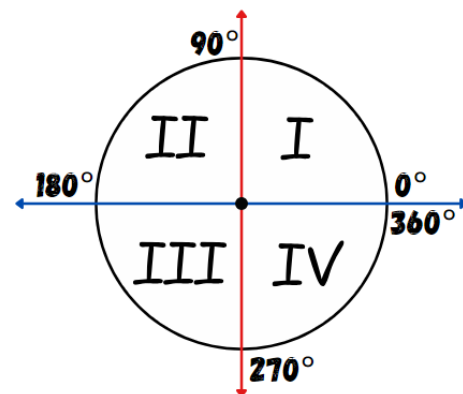
$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Quando o ângulo é alterado, a sua posição no círculo também é alterada.

Quadrantes do círculo trigonométrico

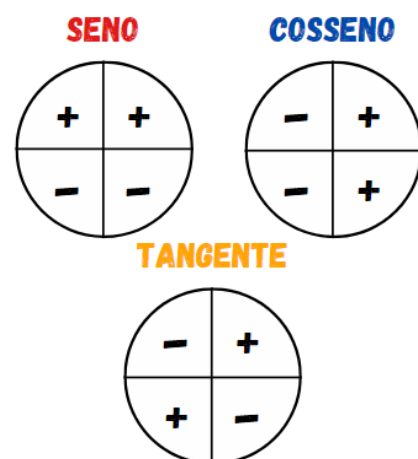
O círculo trigonométrico possui 4 quadrantes, pois os eixos dividem o círculo em quatro arcos.

- **Primeiro quadrante:** é o quadrante dos ângulos que estão entre 0° e 90° ;
- **Segundo quadrante:** é o quadrante dos ângulos que estão entre 90° e 180° ;
- **Terceiro quadrante:** é o quadrante dos ângulos que estão entre 180° e 270° ;
- **Quarto quadrante:** é o quadrante dos ângulos que estão entre 270° e 360° .



Sinais nos quadrantes

- **Primeiro quadrante:** o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos neste quadrante são sempre positivos;
- **Segundo quadrante:** o seno neste quadrante é sempre positivo e o cosseno e a tangente são negativos;
- **Terceiro quadrante:** o seno e o cosseno neste quadrante são sempre negativos e a tangente positiva;
- **Quarto quadrante:** o seno e a tangente neste quadrante são sempre negativos e o cosseno positivo.



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Material complementar:

Círculo

trigonométrico:

<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm>

Trigonometria no círculo: <https://youtu.be/OPsqOAgxR4g?si=GS95pNagk2OXvZbS>

Eixo das tangentes: https://youtu.be/TQO34tILYKE?si=d4-1yloS_ByKq3k4

Medidas de cosseno e seno no círculo trigonométrico:

<https://youtu.be/9FgfEQM1a3c?si=dJBAtUIkuPhKzuPK>

Redução de ângulos ao primeiro quadrante:

<https://descomplica.com.br/d/vs/aula/reducao-de-quadrantes/>

Ângulos notáveis e simetria: <https://youtu.be/KcLosmgvRcE?si=ve7riPeJIJrmeQxt>

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

As principais **razões trigonométricas** são as do seno, cosseno e tangente. Além disso, essas razões estão associadas ao **triângulo retângulo**.



1. Para determinar a medida do **seno** de um ângulo, basta calcular a **razão entre o cateto oposto e a hipotenusa**: $\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$.

2. Para determinar a medida do **cosseno** de um ângulo, basta calcular a **razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa**:

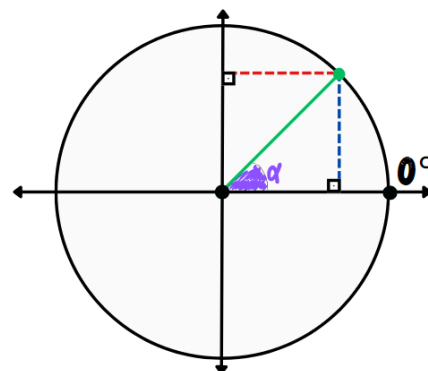
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

3. Para determinar a medida da **tangente** de um ângulo, basta calcular a **razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente**:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Observação:

Perceba que podemos visualizar o triângulo retângulo no círculo trigonométrico, como mostra a imagem.



Ângulos notáveis

Os ângulos notáveis são os mais recorrentes quando se trata de razões trigonométricas.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
SENO	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
COSSENO	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
TANGENTE	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Material complementar:

Razões

trigonométricas:

<https://www.todamateria.com.br/razoes-trigonometricas/>

Razões

trigonométricas:

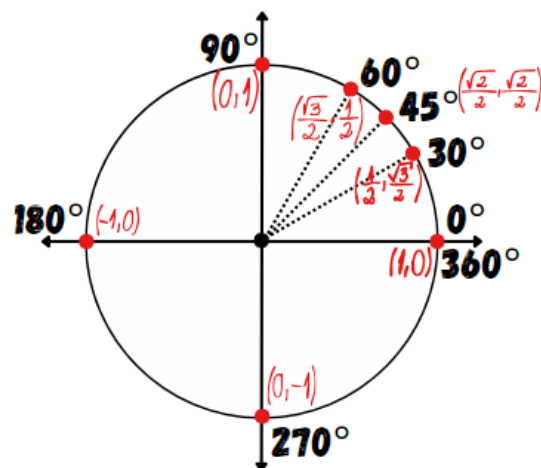
https://youtu.be/v0Yj0JWs-h4?si=pOZ-JYqf_7y-Yh1X

Razões

trigonométricas

completo:

https://youtu.be/D-E_A04ReTE?si=XofE3d-9WpOfPvGB



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Função seno

A função seno é uma função f que **associa cada número real ao seu seno**:

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

O sinal da função seno é **positivo quando x pertence ao primeiro e ao segundo quadrantes** e é **negativo quando pertence ao terceiro e ao quarto quadrantes**.

O conjunto Imagem da função seno são todos os valores que ela pode assumir. Para a função f definida anteriormente, os valores vão de -1 até +1. Ou seja, $\text{Im}_f = [-1, 1]$.

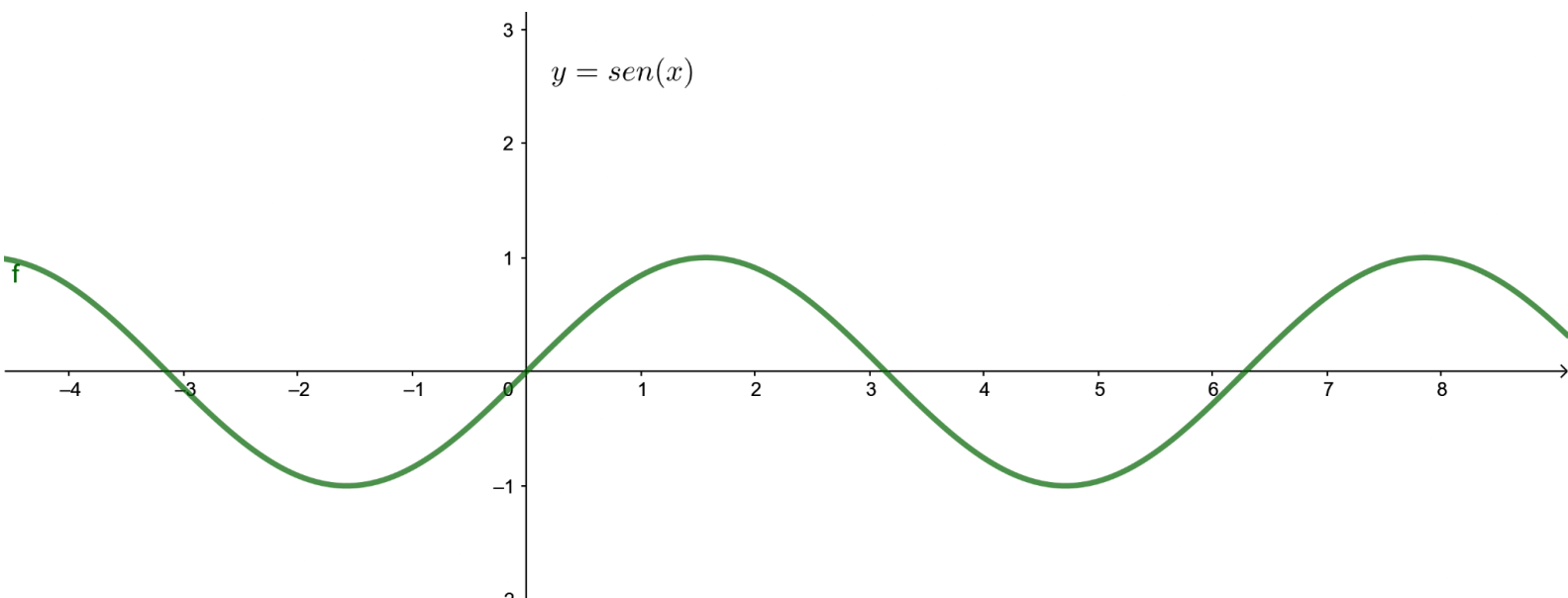
Exemplos de funções seno:

$$f(x) = \sin(x) ; g(x) = \sin(3x) \text{ e } h(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right).$$

Gráfico da função seno

O gráfico da função seno é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ em que f esteja definida. Para o caso da função $f(x) = \sin(x)$, temos o seguinte gráfico:

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO



Raízes da função seno

São **todos os valores de x que fazem com que f seja zero**. Podemos perceber que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$.

Perceba que todos os valores que satisfazem essa igualdade são raízes da função seno: $x = 0$, $x = \pm \pi$, $x = \pm 2\pi$, ... **São infinitas as raízes de f** .

Função cosseno

A função cosseno é uma função f que **associa cada número real ao seu cosseno**:

$$f(x) = \cos(x)$$

O sinal da função cosseno é **positivo quando x pertence ao primeiro e ao quarto quadrantes** e é **negativo quando x pertence ao segundo e ao terceiro quadrantes**.

O conjunto Imagem da função cosseno são todos os valores que ela pode assumir. Para a função f definida anteriormente, os valores vão de -1 até +1. Ou seja, $\text{Im}_f = [-1, 1]$.

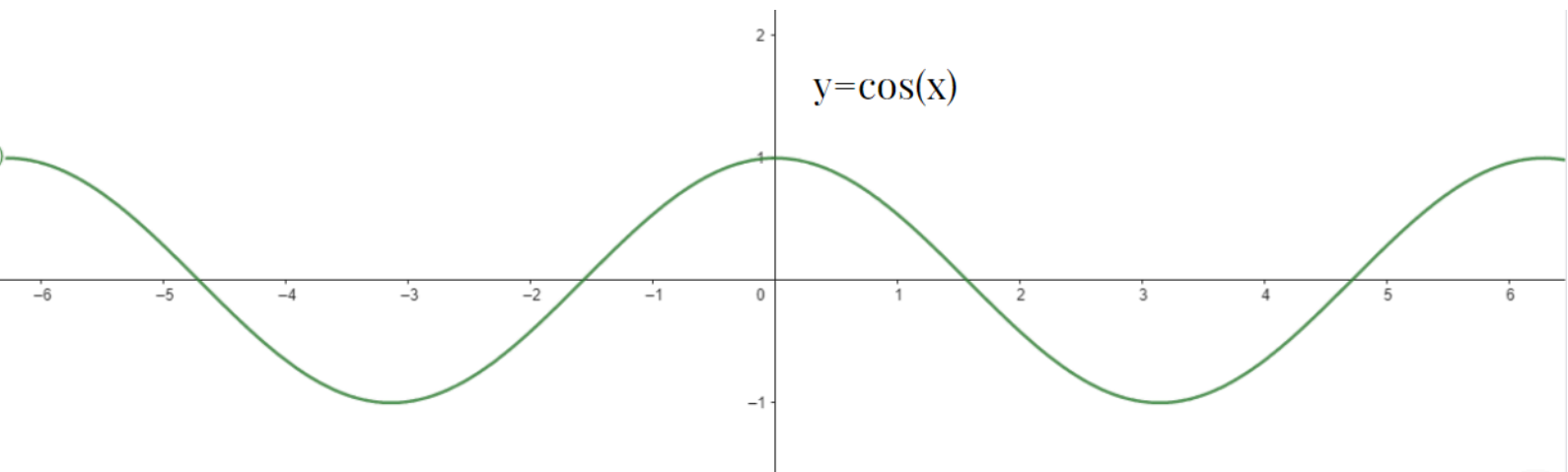
Exemplos de funções cosseno:

$$f(x) = \cos(x); g(x) = 7\cos(x) \text{ e } h(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right).$$

Gráfico da função cosseno

O gráfico da função cosseno é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ em que f esteja definida. Para o caso da função $f(x) = \cos(x)$, temos o seguinte gráfico:

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO



Raízes da função cosseno

São **todos os valores de x que fazem com que f seja zero**. Podemos perceber que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$.

Perceba que todos os valores que satisfazem essa igualdade são raízes da função cosseno: $x = \pm \frac{\pi}{2}, x = \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$. **São infinitas as raízes de f .**

Função tangente

A função tangente é uma função f que **associa cada número real à tangente**:

$$f(x) = tg(x)$$

A função tangente está associada às funções seno e cosseno da seguinte forma:

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Logo, a **função tangente não está definida para os valores de x em que $\cos(x) = 0$** .

A imagem da função tangente está compreendida no intervalo $(-\infty, \infty)$. A função tangente tem período π de forma que $f(x + \pi) = f(x)$ para todo x .

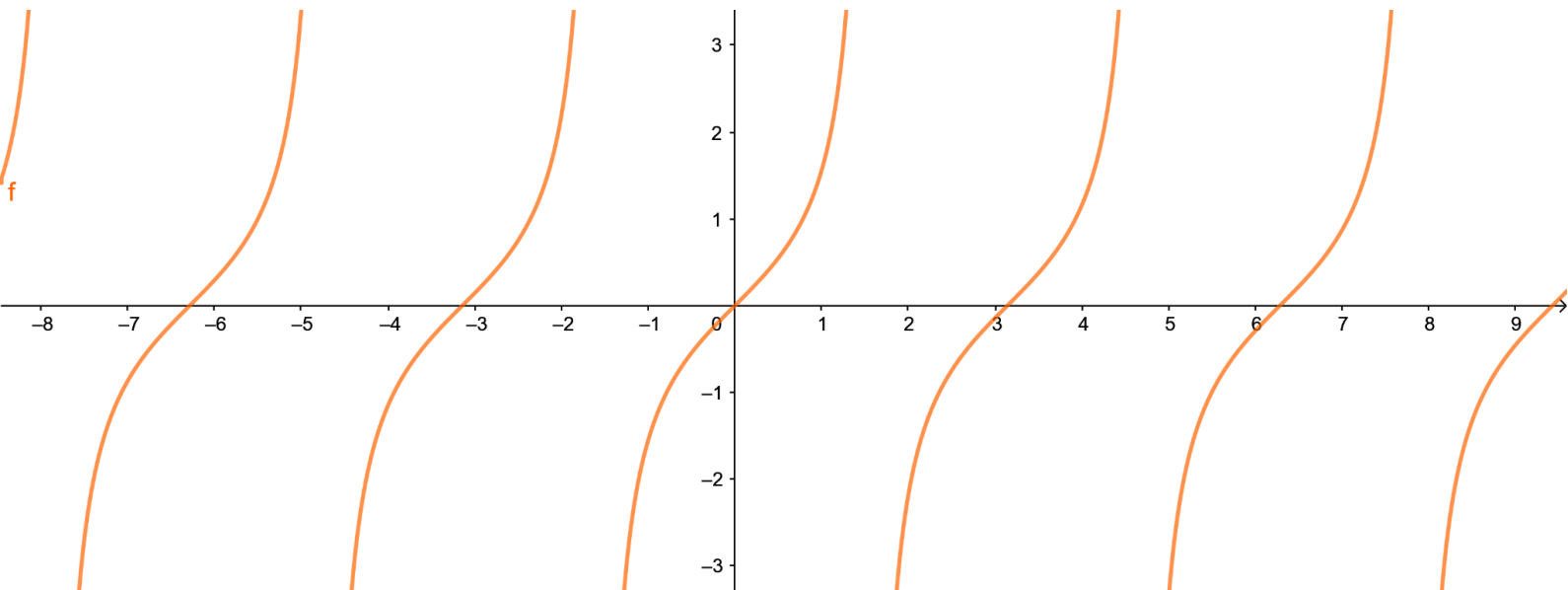
Raízes da função tangente

A função tangente tem raiz quando $\sin(x) = 0$, ou seja $x = 0, x = \pm 2\pi, \dots$. **As raízes da função tangente são as mesmas da função seno.**

Gráfico da função tangente:

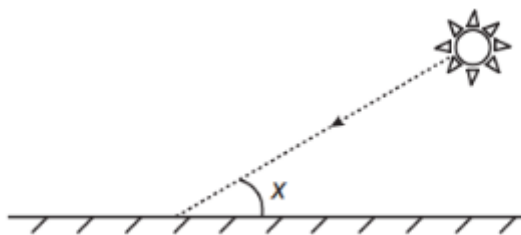
O gráfico a seguir apresenta a função tangente:

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO



Exercícios

15 - (Enem 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \sin(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90° .



Quando $x = 30^\circ$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- A. 33%
- B. 50%
- C. 57%
- D. 70%
- E. 86%

16 - (VUNESP/UNESP) Considere os gráficos das funções $y = \sin(x)$ e $y = \sin(2x)$ em um mesmo plano cartesiano. O número de interseções desses gráficos, para x no intervalo $[0, 2\pi]$, é



PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.
- E. 7.

GABARITO

EXERCÍCIO	ALTERNATIVA
1	E
2	C
3	B
4	B
5	E
6	B
7	E
8	C

EXERCÍCIO	ALTERNATIVA
9	D
10	D
11	D
12	E
13	A
14	D
15	B
16	C